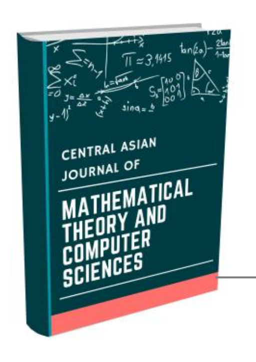


CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES

http://cajmtcs.centralasianstudies.org/index.php/CAJMTCS

Volume: 03 Issue: 05 | May 2022 ISSN: 2660-5309

Представление Решений Одного Класса Системы Дифференциальных Уравнений В Комплексной Плоскости

Орипов Т. С.

К.ф.-м.н., доцент кафедра высшей математики ДИПП

Аннотация:

В работе, рассматривается некоторые нелинейные системы дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами. Учитывая тождественное выполнение условия совместности систем, находятся многообразия их решений. Учитывая аналитичности функций данных в системах, с применением основные теоремы интеграла Коши, и теории вычетов находим непрерывное решение систем. Тем самым в данных интегралах особые точки устраняются, и в результате получаем непрерывное решение изучаемые системы во всей области.

ARTICLEINFO

Article history:

Received 19 Mar 2022

Revised form 17 Apr 2022

Accepted 21 May 2022

Ключевые слова: нелинейная система уравнений, условие совместности, аналитическая функция, устранение особенность в системе, непрерывное решение системы.

---***---

В настоящей работе, рассматривается некоторые системы дифференциальных уравнений с нелинейными правыми частями с сингулярными коэффициентами. Учитывая тождественное выполнение условия совместности систем, находятся многообразия решений. Учитывая условию, когда данные функций в системах аналитически. Применяя основные теоремы интеграла Коши, и теории вычетов находим непрерывное решение систем в данной области. Затем анализируется гладкости решения систем в окрестности и в самых особых точек, принадлежащим полицилиндрам либо бицилиндрам в области $\overline{D}(a,b)$, для всяких порядках особенностей.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial W}{\partial z_1} = \frac{p(z_1,z_2)}{\left(z_1 - z_1^{(0)}\right)^n} m(z_1,z_2,W), \quad \frac{\partial W}{\partial z_2} = \frac{q(z_1,z_2;W)}{\left(z_2 - z_2^{(0)}\right)^n}, \qquad (1)$$

где $p,m,q \in A(\overline{D})$, по W, $W \in A(D_0)$, $\overline{D}(a,b) = \left\{z_k, z_k^{(0)}\right) \left| z_k - z_k^{(0)} \right| \le a, |W| \le b \right\}$, $(k=1,2)$.

Начальное условие, или задачи Коши для системы (1) ставится в виде

$$W = W_0 \text{ при } z_k = a_k, (k=1,2). \qquad (2)$$

Пусть в системе (1) функции $p(z_1,z_2)$, $m(z_1,z_2,W)$ – считаются как вполне определёнными функциями.

Условие совместности системы (1) в точках области $\overline{\Pi}_2$, кроме точки $z = z_k^{(0)}$ выполняется тождественно, тогда и только тогда, когда функция $q(z_1, z_{2;}; W)$ имеет взаимосвязь с функциями $p(z_1, z_2),\ m(z_1, z_2, W)$ – вида:

$$q(z_1, z_2; W) = \left(z_2 - z_2^{(0)}\right)^n \left\{ \frac{\partial A}{\partial z_2} - \frac{\partial M}{\partial z_2} + f\left[z_2; M(z_1, z_2; W) - A(z_1, z_2)\right] \right\} m(z_2; W) \text{, (3)}$$

где функции $M(z_2, W), A(z_1, z_2)$ определяются через соответствующие данные функции p, q, а функция $f(z_2, M - A)$ - находится из формулы (2) в виде

$$f\left[z_2; M(.) - A(.)\right] = \frac{q(z_1, z_2; W)}{\left(z_2 - z_2^{(0)}\right)^n \cdot m(z_2; W)} + \frac{\partial M}{\partial z_2} - \frac{\partial A}{\partial z_2} \ . \qquad (4)$$

Поскольку интегралы от правых частей системы (1) в точках $z_k = z_k^{(0)}\ (k = 1,2)$ не существуют, по этой причине, по аналогии с [4-5], требуем выполнения условий малости функций $p(z_1, z_2; W) = \alpha(z_2, W) \cdot o((z_1 - z_1^{(0)})^{n-\lambda}),\quad q(z_1, z_2; W) = \beta(z_1, W) \cdot o((z_2 - z_2^{(0)})^{n-\lambda}), (0 \le \lambda < 1)$.
Существует следующее обобщении утверждения Михайлова Л.Г.:

Лемма 1. *Пусть задана система дифференциальных уравнений (1). Если в случаи ограниченности* $\partial_{z_k} W$*, существуют пределы в особых точках области* $\lim\limits_{z_k \to z_k^{(0)}} \left((z_k - z_k^{(0)})^n \dfrac{\partial W}{\partial z_k} \right) = 0,\ (k = 1,2),$ *То данная система имеет лишь некоторые частные, либо особые решения исходной системы.*

Допустим, что условие совместности системы (1) выполняется, но не тождественно. Тогда из этой соотношения, можем определить неизвестную функцию определённой формулой. При этом, можем иметь функции $W = H(z_1, z_2)$. Если такая функций удовлетворяет системе (1), то она будет некоторым частным, либо особым решением системы. Иначе говоря, исходная система несовместна.
Пусть условие совместности системы (1) выполняется тождественно. Интегрируем первое уравнение системе (1);

$M(z_2; W) - A(z_1, z_2) = V$, (5) где $V = V(z_2)$- новая неизвестная функция. Продифференцировав обе части равенство (5) по переменной z_2, подставив её значение во второе уравнение системы (1), и с учётом значении функции $q(z_1, z_2; W)$ из (2), будем иметь

$$\frac{\partial V}{\partial z_2} = f(z_2; V). \qquad (6)$$

Интегрируя регулярного комплексного дифференциального уравнения (КДУ) (6), удовлетворяющим начальным условием (2), получим:

$$V(z_2) = V_0 + H(z_2),$$

где $V_0 = V(a_2)$-некоторое постоянное число. Далее, подставляя значение V из последней формуле в (3), и переходя к прежним переменным, получим, решение исходной системы удовлетворяющиеся начального условия (2) в виде

$$W(z_1,, z_2) = M^{-1}\left[z_2; A(z_1,, z_2) + W_0 + H(z_2)\right]. \qquad (7)$$

Теорема 1. *Пусть в системе КДУ (1)* $p,m,q \in A(\overline{D})$, $W \in A(D_0)$. *Если условие совместности системы (1) выполняется, но не тождественно, а также выполняется условии леммы 1, то существует некоторое частное, либо особое решение системы. В противном случае, система (1) несовместна. Для тождественного выполнения условия совместности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы функция* $q(z_1, z_2; W)$ *имела вид (2). Если КДУ (6) имеет определённого вида решение, то и система (1) также разрешима, и многообразия её решений определяется явной формулой (7), возможно многозначной. Если же в системе (1) применять теорию вычетов, то решение исходной системы всюду* $(D^{\pm}, +L)$ *области* $\overline{D}$, *включая границе - непрерывно. При этом, если предыдущие условий не выполняются, то по формуле (3) особенность системы (1) в точке* $z = z_2^{(0)}$ *устраняется, а в другой точке вырождении* $z = z_1^{(0)}$, *имеет особенности порядка (n-1).*

2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial W}{\partial z_1} = \frac{a(z_1, z_2)}{z_1 - z_1^{(0)}} p(z_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial z_2} = b(z_1, z_2; W), \qquad (8)$$

где $a, b, p \in A(\overline{D})$ по всем переменным, $W \in A(D_9)$. Прежде всего заметим, что для существования непрерывного решения системы (8) необходимо, чтобы для данной системы выполнялись условия леммы 1. Тогда из системы (8) получаем: $a = a(z_1, z_2)$, $p(z_2; W) = 0$, либо $W = h(z_2)$. Если эта функция удовлетворяет системе уравнений (8), то она будет частным, либо особым решением системы. Тем самым определяем, что в точке вырождения система (8) может иметь некоторое частное решение.

Условие совместности системы (8) имеет вид

$$(z - z_1^{(0)}) \frac{\partial b}{\partial z_1} + ap \frac{\partial b}{\partial W} = a \frac{\partial p}{\partial W} b + \left(p \frac{\partial a}{\partial z_2} + a \frac{\partial p}{\partial z_2} \right). \qquad (9)$$

Если условие *(9)* выполняется, но не тождественно, то из этого соотношения также, находится функция $W = h(z_1, z_2)$. Если эта функция удовлетворяет систему (8), то она будет частным ее решением. В противном случае, система (8) несовместна. Для того, чтобы соотношение (*9)* выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция $b(z_1, z_2; W)$ имела вид

$$b(z_1, z_2; W) = \left\{ \frac{\partial A}{\partial z_2} - \frac{\partial P}{\partial z_2} + f[z_2; P(z_2; W) - A(z_1, ...)] \right\} p(z_2; W), \qquad (10)$$

где $P(z_2; W) = \int\limits_{W_0}^{W} \frac{d\sigma}{p(z_2; \sigma)}$, $A(z_1, z_2) = \int\limits_{L} \frac{a(t_1, z_2)}{t_1 - z_1^{(0)}} dt_1$. Если функция $a(z_1, z_2)$ удовлетворяет условию леммы 1, то функции $A(z_1, z_2)$ и $b(z_1, z_2; W)$ всюду в области $\overline{D}$ будут непрерывными, а в особой точке $z_1 = z_1^{(0)}$ имеют логарифмическую особенность. Если же в системе (8) применять теорему о вычетах к функции $A(z_1, z_2)$, то получим некоторую функцию $A(z_1, z_2) = 2\pi i \cdot a(z_1^{(0)}, z_2)$, непрерывной во всей данной области. С учётом этих высказываний, интегрируем первое уравнение системы (8), как КДУ, по переменной z_1

$$P(z_2; W) - A(z_1, z_2) = V, \qquad (11)$$

где $V = V(z_2)$- новая неизвестная функция. Дифференцируя (11) по переменной z_2, подставим её значение во второе уравнение системы (8) и в результате, получим КДУ вида (6), где в этой

уравнении функция *f(z₁,M - A)* определяется из соотношения (10). Далее интегрируя регулярное комплексное дифференциальное уравнение (6) по переменной z_2, будем иметь $V = \Phi(z_2;C)$ или $V = \Phi(z_2;W_0)$. Подставляя значение функции V в (11), и переходя к прежним переменным, получим многообразие всех решений системы (6) следующей формулой

$$W = P^{-1}\{z_2;\ A(z_1,z_2) + V(z_2;W_0)\}. \qquad (12)$$

Теорема 2. *Пусть в системе (6)* $a, p, b \in A(\overline{D}), W \in A(D_0)$. *Если для системы (6) выполняется условие леммы 1, либо условие совместности (9) выполняется, но не тождественно, тогда найдётся некоторые частные, либо особые решения исходной системы. В противном случае, данная система несовместна. Для того, чтобы условие (9) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(z_1,z_2;W)$ *имела вид (7). Если КДУ вида (6) имеет решение, тогда система (8) также разрешима и многообразие её решений определяется явной формулой (12), непрерывной во всей расширенной данной области.*

3 . Рассмотрим систему дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial z_1} = a(z_1,z_2)\,m(z_2;W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{b(z_1,z_2;W)}{(z_2 - z_2^{(0)})^n}\ , \qquad (13)$$

где $a,m,b \in A(\overline{D}), W \in A(D_0)$. Условием совместности системы (13) будет

$$\frac{\partial b}{\partial z_1} + a\,m\frac{\partial b}{\partial W} = a\frac{\partial m}{\partial W}\ b + (z_2 - z_2^{(0)})^n\left(m\frac{\partial a}{\partial z_2} + a\frac{\partial m}{\partial z_2}\right). \qquad (14)$$

Если условие совместности *(14)* выполняется, но не тождественно, то из этого соотношения сможем определить некоторую функцию $W = h(z_1,z_2)$. Если эта функция удовлетворяет систему (13), тогда она будет лишь частным решением системы. В противном случае, данная система несовместна. А также, если для системы (13) выполняются условий леммы (при ограниченности частной производной функции по второму аргументу от неизвестной функции), то также сможем получить некоторое частное, либо особое решение системы. Для того, чтобы найти многообразие всей решений системы (13), необходимо и достаточно, чтобы тождественно выполнялась условие совместности (14). Это требование выполняется тогда и только тогда, когда функция $b(z_1,z_2;W)$ принимает вид:

$$b(z_1,z_2;W) = (z_2 - z_2^{(0)})^n \cdot \left\{\frac{\partial A}{\partial z_2} - \frac{\partial M}{\partial z_2} + f[z_2;M(z_2;W) - A(z_1,z_2)]\right\}\cdot m(z_2;W)\,, \ (15)$$

где $A(z_1,z_2) = \int_0^{z_1} a(t_1,z_2)dt_1, M(z_2;\ W) = \int_0^{W}\frac{d\sigma}{m(z_2;\sigma)}$, $f(z_2;M - A) -$ вполне определённая функция. Заметим, что в этом случае особенность в исходной системе устраняется, и получаем регулярную систему дифференциальных уравнений. Подставляя значение функции *b(z₁,…)* из (15) в системе (13), получаем регулярную систему, где в ней условие совместности выполняется тождественно. Затем интегрируя первое уравнение последней системы, по переменной z_1, получим соотношение $M(z_2,;W) - A(z_1,z_2) = V$, где $V = V(z_2)$- новая неизвестная функция. Дифференцируем последнего равенства по переменной z_2, подставим её значения в системе (13), в результате, получим КДУ вида (6), где функция $f(z_1,M - A)$ определяется из формулы (15). Если считать, что функция $V = V(z_2;W_0)$

будет решением КДУ вида (6), то переходя к прежним переменным, получаем многообразие решений исходной системы следующей непрерывной функции:

$$W(z_1,z_2)=M^{-1}\{z_2;A(z_1,z_2)+V(z_2;W_0)\}. \quad (17)$$

Теорема 3. *Пусть в системе (13)* $a,m,b\in A(\overline{D}), W\in A(D_0)$. *Если условие совместности (14) выполняется, но не тождественно, а также, в случаи ограниченности частных производных неизвестной функции в системе (13), выполняются условия леммы 1, то определяются некоторые частные, либо особые решения системы. Для того, чтобы условие (14) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(z_1,z_2;W)$ *имела вид (15). Если КДУ вида (6) имеет определённого вида решение, то система (13) также разрешима и многообразие её решений определяется явной формулой (17), непрерывной во всей расширенной области.*

4. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial W}{\partial z_1}=\frac{a(z_1,z_2)}{(z_1-z_1^{(0)})^n}\,m(z_2;W),\quad \frac{\partial W}{\partial z_2}=\frac{b(z_1,z_2,;W)}{(z_1-z_1^{(0)})^n}, \quad (18)$$

где $a,b,m\in A(\overline{D}), W\in A(D_0)$. Для непрерывности решения системы (18) необходимо, чтобы при ограниченности частных производных искомой функции, выполнялись следующие равенства

$$\lim_{z_1\to z_1^{(0)}}(z_1-z_1^{(0)})^n\,\frac{\partial W}{\partial z_k}=0,\quad (k=1,\,2). \quad (19)$$

Тогда из системы (18) сможем определить функции $W=h_i(z_1,z_2),(i=1,2)$, где они могут быть частными, либо особыми решениями системы. Условие совместности системы (14) принимает следующий вид

$$\frac{\partial b}{\partial z_1}+\frac{a\,m}{(z_1-z_1^{(0)})^n}\frac{\partial b}{\partial W}=\left(\frac{a}{(z_1-z_1^{(0)})^n}+\frac{n}{z_1-z_1^{(0)}}\right)\cdot b+m\frac{\partial a}{\partial z_2}+a\frac{\partial m}{\partial z_2}. \quad (20)$$

Если условие *(20)* выполняется, но не тождественно, тогда из этого соотно-шению можно определить функцию вида $W=h(z_1,z_2)$. Если эта функция удовлетворяет системе уравнений (18), то оно будет частным решением системы. В противном случае, исходная система не совместна. Для того, чтобы существовало многообразие решений системы (18), необходимо и достаточно, чтобы условие *(20)* по всем переменным выполнялось тождественно. Это требование выполняется тогда и только тогда, когда функция $b(z_1,z_2;W)$ принимает вид

$$b(z_1,z_2;W)=(z_1-z_1^{(0)})^n\cdot\left\{\frac{\partial A}{\partial z_2}-\frac{\partial M}{\partial z_2}+f\left[z_2;M(z_2,W)-A(z_1,z_2)\right]\right\}\cdot m(z_2;W), \quad (21)$$

где $A(z_1,z_2)=\int_L\frac{a(t_1,z_2)}{(t_1-z_1^{(0)})^n}dt_1,\quad M(z_2,;W)=\int_{W_0}^{W}\frac{d\sigma}{m(z_2,\sigma)}$. Для того, чтобы первый настоящий интеграл существовал, необходимо, чтобы функция $a(z_1,z_2)$ удовлетворяла условию малости $a(z_1,z_2)=\alpha(z_2)\cdot o(\left|z_1-z_1^{(0)}\right|^{n-\lambda}),\ (0\le\lambda<1)$. А также, если считать, что подынтегралная функция в данной области аналитической, то можно ей применять теоремы о вычетах функции, и полученная

функция $A(z_1,z_2)=\dfrac{2\pi i}{(n-1)!}\cdot\lim_{z_1\to z_1^{(0)}}\left(\dfrac{\partial^{n-1}a}{\partial z_1^{(n-1)}}\right)$ будет непрерывной на данной области $\overline{D}$. Теперь учитывая значение функции $b(z_1,z_2;W)$ из формулы (21), интегрируем систему (18). В результате, по аналогии с предыдущим случаям, интегрируем первое уравнение системы (18) по переменной z_1, как КДУ с параметром z_2, а затем подставим её результат во второе уравнение системы. Если полученное КДУ имеет решение с начальными данными вида $V=V(z_2,W_0)$, то исходная система также разрешима, и после перехода к прежним переменным, получим многообразие решений системы формулой

$$W(z_1,z_2)=M^{-1}\{z_2;\,A(z_1,z_2)+V(z_2;W_0)\}. \quad (22)$$

Теорема 4. *Допустим, что в системе (18)* $a,m,b\in A(\overline{D}),\ W\in A(D_0)$ *.Если условие совместности (9) выполняется, но не тождественно, а также, если каждые из функций* a,b,m *данной системы удовлетворяют условию леммы 1, тогда находятся некоторые частные, либо особые решения исходной системы. Для того, чтобы* ***у****словие совместности (9) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(z_1,z_2;W)$ *принимала вид (21). Если КДУ вида (6) имеет решение, то исходная система в силу теоремы о вычетах, также разрешима, причём она непрерывна и многообразие её решений определяется формулой (22).*

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988., 512 с.
2. Берс Л.,Шехтер Дж.Уравнения в частных производных.//Л.Берс, Дж.Шехтер//, Москва,1963-356 с.
3. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами, - Дониш, 1983,183 с .
4. Магамедов Г.А., Паломодов П.Н. Обобщённые аналитические функции многих переменных. // Г.А.Магомедов, П.Н. Паломодов// , Мат.сб.1978,-т.106(148), с.515-543.
5. Михайлов Л.Г. Многообразие решений обобщённой системы Коши-Римана со многими переменными. ./ Л.Г.Михайлов//- Докл. АН Тадж. ССР- 1972, т.21, (№7)- с. 14-17.
6. Михайлов Л.Г. Об одном интегральной преставлении функции многих комплексных переменных.- / Л.Г. Михайлов // -Докл. АН Тадж. ССР,-1971- т.14 (№5)- с.5-7.
7. Горелов И.В. Об одном интегральном представлении функций многих комплексных переменных. // И.В.Горелов // Докл. АН Тадж. ССР, 1978, т. 21,№5 , с. 7-9.
8. Шарипов Б., О некоторых системах , в полных дифференциалах, интегрируемых явно.//Б. Шарипов //,-Докл.АН Тадж.ССР,1984, т.27, №7,с. 365-368.
9. Шарипов Б.Формула представления решений одного класса обобщённой системы Коши-Римана с сингулярными коэффициентами.// Б.Шарипов//, Дифференциальные уравнения,-2015, Т.51(№9). С.1252-1256.
10. Tutsche W. Partille komplexe differentialgleichungen in eine in mehreren komplexen variablen. –VEB, Deutscher verlag der Wissenschaften, Berlin, 1977,-308 s.
11. Лаврентьев М.А.,Шабат Б.В.Методы теории функций комплексного переменного. М.,1